

---

# Commande frontière adaptative d'un bief de canal avec prélèvements inconnus

**Mariama Ndiaye — Georges Bastin**

CESAME  
Université catholique de Louvain  
Bâtiment Euler,  
4-6 Av. Georges Lemaitre  
1348 Louvain-La-Neuve  
Belgique  
{ndiaye ; bastin}@auto.ucl.ac.be

---

*RÉSUMÉ.* On considère un bief de canal d'irrigation incliné, soumis à un prélèvement d'eau, dont la dynamique est décrite par les équations de Saint-Venant. On propose une loi de commande par amortissement frontière ayant pour objectif de stabiliser le niveau et le débit autour d'un profil d'équilibre désiré. La convergence de l'algorithme de contrôle est analysée à l'aide des solutions caractéristiques. La performance du contrôle est illustrée par des simulations réalistes. Une version adaptative du contrôle est proposée dans le cas où les prélèvements sont inconnus.

*ABSTRACT.* We consider a reach of irrigation canal, subject to water withdrawals, whose dynamics are described by the Saint-Venant equations. A boundary damping control law is proposed in order to stabilise the water level and the flow rate at a desired equilibrium profile. The convergence of the control algorithm is analysed on the basis of the characteristic solutions. The control performance is illustrated with a simulation experiment. An adaptive version of the control law is proposed for the case where the withdrawals are unknown.

*MOTS-CLÉS :* Stabilisation, contrôle frontière, amortissement frontière, système hyperbolique, équations de Saint-Venant.

*KEYWORDS:* Stabilisation, Boundary Control, Boundary Damping, Hyperbolic Systems, Saint-Venant Equations.

---

## 1. Introduction

En hydraulique, les écoulements dans les canaux à surface libre sont généralement décrits par les équations de Saint-Venant qui sont des équations aux dérivées partielles hyperboliques du premier ordre non-linéaires.

Le contrôle et la régulation des canaux ont fait l'objet de nombreuses études. Le lecteur intéressé trouvera un état de l'art détaillé sur le sujet dans l'ouvrage de synthèse de (Georges et Litrico, 2002).

En utilisant les approches classiques de l'automatique ( $PI$ ,  $LQ$ ,  $H_\infty$ , linéarisation par bouclage), de nombreuses méthodes de commande des canaux à surface libre ont été étudiées sur la base d'approximations en dimension finie des équations de Saint-Venant. On trouvera en particulier une vue d'ensemble de ces méthodes dans le chapitre 4 de (Georges et Litrico, 2002).

Le présent article se situe dans le contexte d'une synthèse de commande qui est basée directement sur les propriétés du modèle en dimension infinie (c'est-à-dire directement sur les équations de Saint-Venant) sans aucune approximation ou discrétisation préliminaire. Dans ce contexte, les auteurs (de Halleux *et al.*, 2003) ont proposé et analysé des lois de commande frontière basées sur les invariants de Riemann pour un bief de canal horizontal délimité par deux vannes de fond et qui n'est soumis à aucun prélèvement entre les vannes.

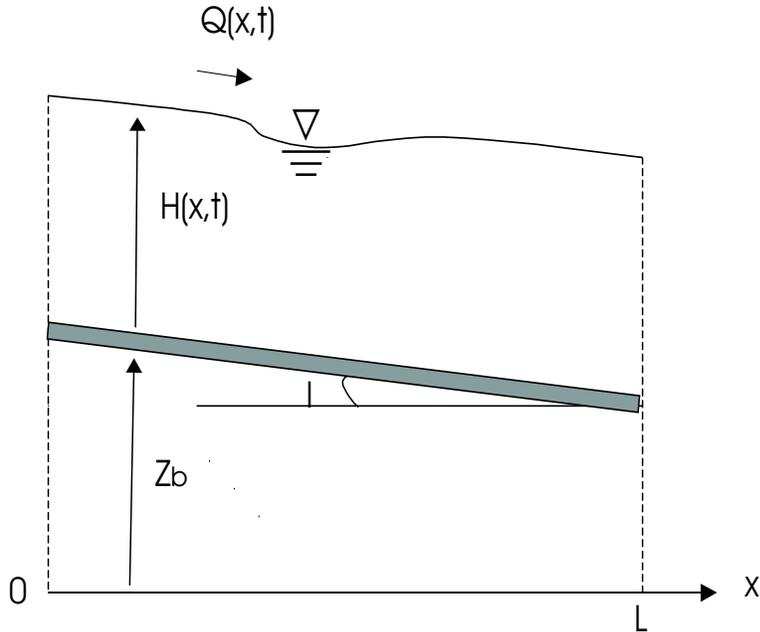
Notre objectif dans cet article est d'examiner comment la méthode de commande (de Halleux *et al.*, 2003) peut être étendue au cas où le bief est en pente et est soumis à des prélèvements constants dans le temps. Dans un premier temps, nous supposons que le débit de prélèvement est connu et nous étendons la notion d'amortissement frontière (Greenberg et Tsien, 1984) au cas des solutions caractéristiques du système (qui constitue l'extension naturelle des invariants de Riemann) et nous en illustrons le comportement par des simulations numériques. Dans un deuxième temps, nous supposons que le débit de prélèvement est inconnu et nous proposons une extension adaptative des lois de commande précédentes.

## 2. Modélisation

Nous considérons (voir figure 1) un bief de canal incliné, soumis à des prélèvements d'eau. La dynamique du système est décrite par les équations de Saint-Venant sous les hypothèses de modélisation suivantes :

- le canal est prismatique de longueur  $L$  ;
- la pente  $I$  du canal est suffisamment faible pour que l'on puisse faire l'approximation  $\sin I \cong I$  ;
- la masse volumique de l'eau est constante ;
- la répartition de la pression est hydrostatique ;

- les effets de la viscosité interne sont négligeables par rapport aux frottements externes.



**Figure 1.** Canal incliné

Sous ces hypothèses la dynamique du canal est décrite par les équations aux dérivées partielles (équations de Saint-Venant) suivantes :

Conservation de la masse :

$$\partial_t S(x, t) + \partial_x Q(x, t) = q(x) \tag{1}$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\partial_t Q(x, t) + \partial_x \left( \frac{Q^2(x, t)}{S(x, t)} \right) + gS(x, t)\partial_x z(x, t) = \Phi(S, Q, q) \tag{2}$$

avec les notations suivantes :

$t$  variable de temps (s),

$x$  variable d'espace (m), orienté dans le sens de l'écoulement,  $0 \leq x \leq L$ ,

$S(x, t)$  : section mouillée ( $m^2$ ) pour  $0 \leq x \leq L$  et  $0 \leq t$ ,

$Q(x, t)$  : débit d'eau ( $m^3/s$ ) dans le bief pour  $0 \leq x \leq L$  et  $0 \leq t$ ,

$q(x)$  : débit de prélèvement par unité de longueur ( $m^2/s$ ) supposé constant dans le temps,

$\Phi(S, Q, q)$  représente l'effet des frottements et du prélèvement sur la quantité de mouvement,

$z(x) = H(x) + z_b(x)$ , ( $z_b$  est la cote du fond du canal,  $H$  la hauteur de l'eau dans le canal),

$g$  : l'accélération gravitaire ( $m/s^2$ ).

Le canal étant prismatique, la section mouillée  $S$  est une fonction strictement croissante de la hauteur  $H$  :  $S = \sigma(H)$  avec  $\frac{d\sigma}{dH} = \sigma'(H) > 0 \forall H > 0$ .

En termes des variables d'états  $(H, Q)$ , le modèle [1] et [2] se réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\partial_t \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} + A(H, Q) \partial_x \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma'(H)} q \\ G(H, Q, q) \end{pmatrix} \quad [3]$$

$$\text{avec } A(H, Q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sigma'(H)} \\ g\sigma(H) - \frac{Q^2}{\sigma^2(H)}\sigma'(H) & \frac{2Q}{\sigma(H)} \end{pmatrix}$$

et  $G(H, Q, q) = \Phi(\sigma(H), Q, q) - g\sigma(H)\partial_x z_b$

Les valeurs propres de la matrice  $A(H, Q)$ , appelées vitesses caractéristiques sont :

$$C_+(H, Q) = \frac{Q}{\sigma(H)} + \sqrt{\frac{g\sigma(H)}{\sigma'(H)}} \quad [4]$$

$$C_-(H, Q) = \frac{Q}{\sigma(H)} - \sqrt{\frac{g\sigma(H)}{\sigma'(H)}} \quad [5]$$

Nous considérons le cas où la pente  $I$  est faible et l'écoulement est sous critique ou fluvial (c'est-à-dire que les vitesses caractéristiques  $C_+(H, Q)$  et  $C_-(H, Q)$  sont de signe opposé voir Graf 1993). Plus précisément, nous supposons qu'il existe une constante positive  $\epsilon$  telle que :

$$C_-(H, Q) \leq -\epsilon < 0 < +\epsilon \leq C_+(H, Q) \quad [6]$$

le long des solutions du système [3].

### 3. Régime permanent

Pour des conditions frontières constantes  $Q(0, t) = \bar{Q}_0$  et  $H(L, t) = \bar{H}_L \quad \forall t$ , il existe une solution du système [3] en régime permanent :

$$H(x, t) = \bar{H}(x) \quad \text{et} \quad Q(x, t) = \bar{Q}(x) \quad \forall t$$

qui vérifie les équations :

$$\partial_x \bar{Q} = q \tag{7}$$

$$\partial_x \bar{H} = \left( G(\bar{H}, \bar{Q}, q) - \frac{2\bar{Q}}{\sigma} q \right) \left( g\sigma(\bar{H}) - \frac{\bar{Q}^2}{\sigma^2} \sigma'(\bar{H}) \right)^{-1} \tag{8}$$

En intégrant l'équation [7], on obtient la solution explicite suivante pour le débit de régime  $\bar{Q}(x)$ , paramétrée par la condition frontière  $\bar{Q}_0$  :

$$\bar{Q}(x) = \bar{Q}_0 + \bar{Q}_p(x) \quad \text{avec} \quad \bar{Q}_p(x) = \int_0^x q(\xi) d\xi \tag{9}$$

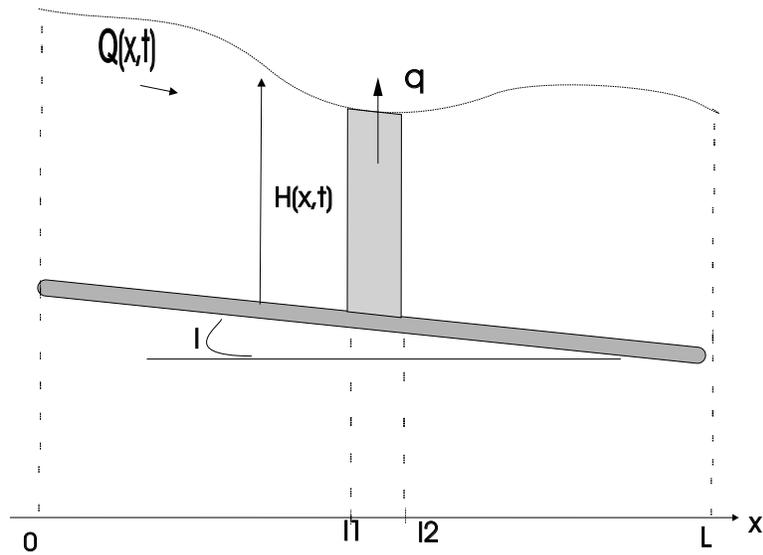
De plus l'équation [8] est une équation différentielle ordinaire dont la solution dépend de la forme des fonctions  $\sigma$  et  $G$  et de la donnée de la condition frontière  $\bar{H}_L$ .

#### Illustration numérique

Considérons un canal de section rectangulaire et de largeur unitaire ( $\sigma(H) = H$ ). On suppose qu'un prélèvement constant et uniforme sur l'intervalle  $[l_1, l_2]$  s'effectue selon le schéma suivant (voir figure 2) :

$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < l_1 \\ \bar{q} < 0 & l_1 \leq x \leq l_2 \\ 0 & l_2 < x \leq L \end{cases}$$

La fonction  $\Phi(\bar{H}, \bar{Q}, q)$  est donnée par l'expression classique (voir par exemple, Malaterre, 1994) :  $\Phi(\bar{H}, \bar{Q}, q) = q \frac{\bar{Q}}{\bar{H}} - g\bar{H}\bar{J}$ . Le premier terme ( $q \frac{\bar{Q}}{\bar{H}}$ ) représente la contribution du prélèvement et le second terme ( $g\bar{H}\bar{J}$ ) la contribution du frottement (avec  $\bar{J} = \left( \frac{\bar{Q}}{\bar{H}} \right)^2 \frac{\bar{R}^3}{K^2}$  la « pente du frottement »,  $K$  le coefficient de Strickler traduisant la nature et la rugosité des berges et du fond, et  $\bar{R} = \frac{\bar{H}}{1 + 2\bar{H}}$  le rayon hydraulique) à l'équation de conservation de la quantité de mouvement.



**Figure 2.** Canal incliné avec une prise d'eau en  $(l_1, l_2)$

On présente la solution  $\bar{Q}(x)$ ,  $\bar{H}(x)$  sur la figure 3 pour les valeurs numériques suivantes :

Longueur du bief de canal :  $L = 50$  mètres

Largeur du bief de canal : 1 mètre

Pente du bief :  $I = 10^{-4}$

Débit à gauche :  $\bar{Q}_0 = 1,5m^3/s$

Niveau à droite :  $\bar{H}_L = 1$  mètre

Pas de discrétisation spatiale  $dx = 0.5m$

Intervalle de prélèvement :  $l_1 = 8.0m, l_2 = 10.0m$

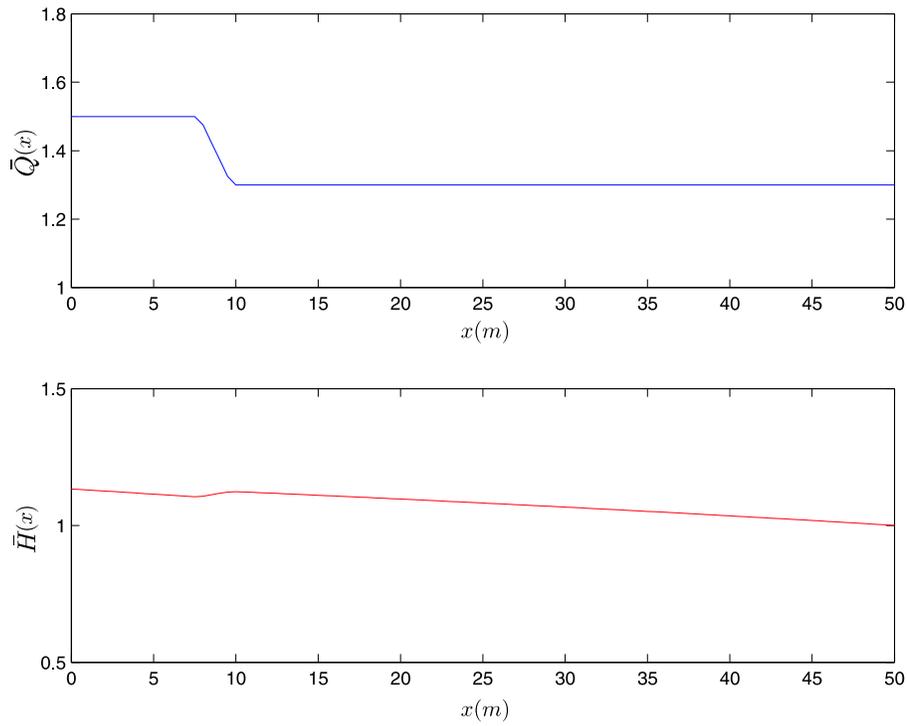
Débit spécifique de prélèvement :  $\bar{q} = -0.1m/s$

Coefficient de Strickler :  $K = 40m^{1/3}/s$

On note aussi que le débit total prélevé est  $Q_P(L) = -q(l_2 - l_1) = -0.2m^3/s$

#### 4. Courbes et solutions caractéristiques

$A(H, Q)$  est une matrice  $2 \times 2$  qui a 2 valeurs propres réelles. Il existe donc une base de vecteurs propres dans laquelle  $A = P^{-1}\Sigma P$  où  $\Sigma = \text{diag}(C_+, C_-)$  matrice diagonale formée de valeurs propres sur la diagonale.



**Figure 3.** Courbes de régime du débit  $\bar{Q}(x)$  et de la hauteur  $\tilde{H}(x)$

Le système [3] qui est :

$$\partial_t \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} + A(H, Q) \partial_x \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma'(H)} q \\ G(H, Q, q) \end{pmatrix}$$

est équivalent à :

$$\partial_t \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} + P^{-1} \Sigma P \partial_x \begin{pmatrix} H \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma'(H)} q \\ G(H, Q, q) \end{pmatrix}$$

où  $P = \begin{pmatrix} -\frac{Q\sigma'(H)}{\sigma^2(H)} + \frac{\sqrt{g\sigma(H)\sigma'(H)}}{\sigma(H)} & \frac{1}{\sigma(H)} \\ -\frac{Q\sigma'(H)}{\sigma^2(H)} - \frac{\sqrt{g\sigma(H)\sigma'(H)}}{\sigma(H)} & \frac{1}{\sigma(H)} \end{pmatrix}$  est une matrice de passage.

En multipliant de part et d'autre par  $P$  on obtient le système diagonalisé suivant :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_+ & 0 \\ 0 & C_- \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( -\frac{Q}{\sigma^2(H)} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\sigma(H)\sigma'(H)}} \right) q + \frac{G}{\sigma(H)} \\ - \left( \frac{Q}{\sigma^2(H)} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\sigma(H)\sigma'(H)}} \right) q + \frac{G}{\sigma(H)} \end{pmatrix}$$

avec :

$$\alpha(H, Q) = \varphi(H) + \frac{Q}{\sigma(H)} \quad \text{et} \quad \beta(H, Q) = -\varphi(H) + \frac{Q}{\sigma(H)}$$

où la fonction  $\varphi(H)$  est une primitive de  $\sqrt{g \frac{\sigma'(H)}{\sigma(H)}} > 0$ , c'est-à-dire

$$\partial_H \varphi(H) = \sqrt{g \frac{\sigma'(H)}{\sigma(H)}}$$

Ce changement de variables constitue un isomorphisme qui permet d'exprimer  $Q$  et  $H$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$H = \varphi^{-1} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

et

$$Q = \frac{(\alpha + \beta)}{2} \sigma \left( \varphi^{-1} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right)$$

Les nouvelles variables  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi définies constituent les solutions du système le long des courbes caractéristiques données par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = C_+(H, Q) \quad \text{pour} \quad \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = C_-(H, Q) \quad \text{pour} \quad \beta$$

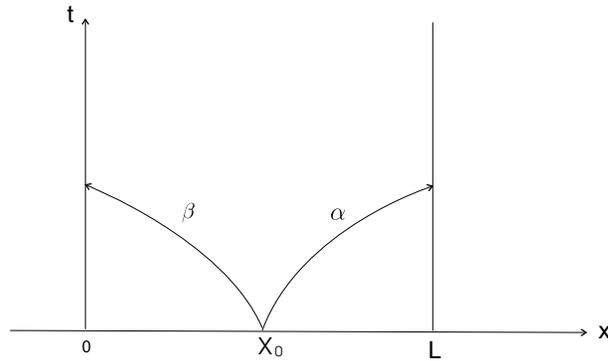
où  $C_+$  et  $C_-$  sont les vitesses caractéristiques définies en [4] et [5].

Le long de leur courbe caractéristique respective, les solutions caractéristiques vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \left(-\frac{Q}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\sigma\sigma'}}\right)q + \frac{G}{\sigma}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\left(\frac{Q}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\sigma\sigma'}}\right)q + \frac{G}{\sigma}$$

Partant d'une condition initiale  $x_0$  à un instant  $t = 0$ , les courbes caractéristiques sont représentées sur la figure 4 où l'on voit la solution caractéristique  $\alpha$  se propager vers la droite et la solution caractéristique  $\beta$  vers la gauche.



**Figure 4.** Courbes caractéristiques

### 5. Contrôle par amortissement frontière

Dans cette section, nous allons examiner comment la méthode de commande proposée dans (de Halleux *et al.*, 2003) peut être étendue au cas d'un bief en pente tenant compte du débit de prélèvement constant et connu. On suppose que l'utilisateur fixe des valeurs de consigne de débit  $\bar{Q}_0$  à l'entrée du bief et de niveau  $\bar{H}_L$  à la sortie du bief.

L'objectif du contrôle est alors de stabiliser le niveau  $H(x, t)$  et le débit  $Q(x, t)$  sur le profil de régime  $\bar{H}(x)$  et le débit de régime  $\bar{Q}(x)$  correspondant aux points de consigne  $\bar{Q}_0$  et  $\bar{H}_L$ . Nous supposons que les débits aux bords  $Q_0(t) = Q(0, t)$  et  $Q_L(t) = Q(L, t)$  sont les actions de contrôle à la disposition de l'utilisateur. La manière dont ces débits seront assignés par la manœuvre des vannes situées aux extrémités du bief sera explicitée dans la section 8.

On suppose aussi que les seules grandeurs mesurables en ligne sont les niveaux  $H_0(t) = H(0, t)$  et  $H_L(t) = H(L, t)$  aux deux extrémités du bief.

Pour atteindre l'objectif de contrôle, nous proposons les lois de commande suivantes :

$$Q_0 = \frac{\bar{Q}_0}{\bar{\sigma}_0} \sigma_0 - \lambda_0 \sigma_0 (\varphi(H_0) - \varphi(\bar{H}_0)) \quad [10]$$

$$Q_L = \frac{\bar{Q}_L}{\bar{\sigma}_L} \sigma_L + \lambda_L \sigma_L (\varphi(H_L) - \varphi(\bar{H}_L)) \quad [11]$$

avec :

$$0 < \lambda_0 < 1, \sigma_0 = \sigma(H_0) \text{ et } \bar{\sigma}_0 = \sigma(\bar{H}_0)$$

$$0 < \lambda_L < 1, \sigma_L = \sigma(H_L) \text{ et } \bar{\sigma}_L = \sigma(\bar{H}_L)$$

$\lambda_0, \lambda_L$  sont des paramètres d'ajustement. Le calcul de ces lois de commande est illustré à la figure 5.

On peut interpréter ces lois de commande comme suit : la vitesse du fluide ( $\frac{Q_0}{\sigma_0}$  ou  $\frac{Q_L}{\sigma_L}$ ) aux extrémités du bief est assignée à la valeur de régime nominal ( $\frac{\bar{Q}_0}{\bar{\sigma}_0}$  ou  $\frac{\bar{Q}_L}{\bar{\sigma}_L}$ ) corrigée par un terme proportionnel à  $\varphi(H_0) - \varphi(\bar{H}_0)$  ou  $\varphi(H_L) - \varphi(\bar{H}_L)$  qui est une transformation non linéaire monotone de l'erreur de régulation de niveau ( $H_0 - \bar{H}_0$ ) ou ( $H_L - \bar{H}_L$ ). En quelque sorte, on peut dire qu'il s'agit d'une commande « proportionnelle non-linéaire ». Mais, nous allons le voir dans la section suivante, la forme particulière de ces lois est surtout motivée par le fait qu'elles réalisent un « amortissement frontière » (*boundary damping*) des solutions caractéristiques inspirées par l'approche qui est suivie dans Greenberg et Ksien (1984) pour les systèmes hyperboliques homogènes.

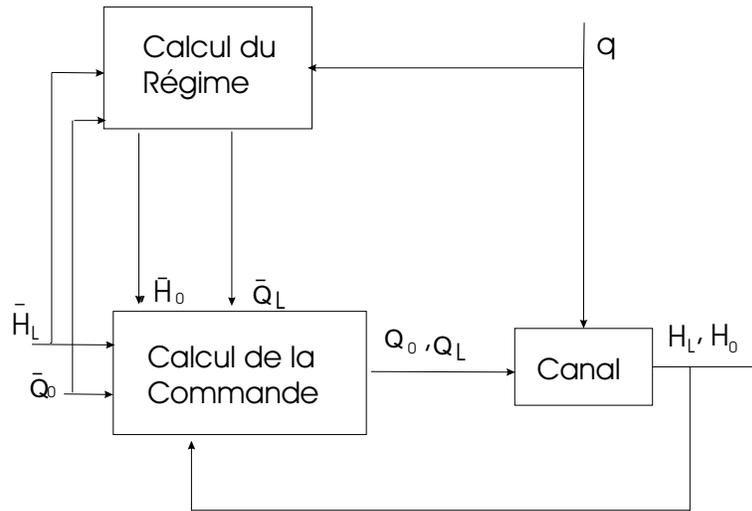
Ces lois de commande sont très simples, leur mise en œuvre ne nécessite que la mesure de  $H_0$  et  $H_L$  aux extrémités du bief, à l'exclusion de toute autre mesure de débit ou de toute autre mesure de niveau à l'intérieur du bief. Toutefois, on a vu à la section 3 que pour calculer les valeurs de régime ( $\bar{Q}$  et  $\bar{H}$ ) on a besoin de connaître le débit de prélèvement  $q(x)$ . Dans la section 7 nous lèverons partiellement cette hypothèse et nous utiliserons alors une technique de contrôle adaptatif.

## 6. Justification de la loi de commande et analyse de la convergence

Les solutions caractéristiques en régime permanent s'écrivent :

$$\bar{\alpha}(x) = \varphi(\bar{H}(x)) + \frac{\bar{Q}(x)}{\sigma(\bar{H}(x))}$$

$$\bar{\beta}(x) = -\varphi(\bar{H}(x)) + \frac{\bar{Q}(x)}{\sigma(\bar{H}(x))}$$



**Figure 5.** Diagramme bloc schématisant le principe dans le cas d'un prélèvement à débit connu

Définissons les écarts par rapport au régime permanent :

$$\tilde{\alpha}(x, t) = \alpha(x, t) - \bar{\alpha}(x)$$

$$\tilde{\beta}(x, t) = \beta(x, t) - \bar{\beta}(x)$$

Le problème de contrôle peut alors être réformulé comme le problème de définir un contrôle frontière permettant de réguler  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  à 0. On peut alors vérifier que les lois de commande [10] et [11] sont équivalentes aux relations suivantes :

$$\tilde{\beta}(L, t) = -k_L \tilde{\alpha}(L, t) \quad \text{avec} \quad k_L = \frac{1 - \lambda_L}{1 + \lambda_L} \quad [12]$$

$$\tilde{\alpha}(0, t) = -k_0 \tilde{\beta}(0, t) \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{1 - \lambda_0}{1 + \lambda_0} \quad [13]$$

Comme les constantes  $k_0$  et  $k_L$  sont positives et inférieures à 1, on comprend pourquoi cette technique de commande est appelée « amortissement frontière ». En effet, on peut voir la relation [12] comme un amortissement d'une trajectoire qui « rebondit » sur la frontière du bief : la solution caractéristique  $\tilde{\beta}$  qui s'éloigne de la frontière est calculée comme une fraction de la solution caractéristique  $\tilde{\alpha}$  qui s'approche de la frontière.

On peut analyser la convergence vers zéro comme suit. Considérons la solution caractéristique  $\alpha(x, t)$  le long de la courbe caractéristique démarrant en  $x = 0$  à l'instant  $t_0$ . Sous la condition d'écoulement sous-critique [6], il existe un instant  $t_1$  pour lequel la caractéristique atteint la frontière en  $x = L$  et tel que la solution  $\alpha(x, t)$  existe et est bornée  $\forall t \in [t_0, t_1]$ .

On définit la quantité  $\nu_1$  :

$$\nu_1 = \frac{|\tilde{\alpha}(L, t_1)|}{|\tilde{\alpha}(0, t_0)|}$$

Considérons maintenant la courbe caractéristique démarrant en  $x = L$  à l'instant  $t_1$ . Par un raisonnement analogue, il existe un instant  $t_2$  pour lequel la caractéristique atteint la frontière en  $x = 0$  et on définit  $\nu_2$  :

$$\nu_2 = \frac{|\tilde{\beta}(0, t_2)|}{|\tilde{\beta}(L, t_1)|}$$

En continuant de la sorte et en utilisant les relations [12] et [13], on en déduit que  $\forall t_0$ , il existe une suite croissante d'instant  $t_j, j = 1, 2, 3, \dots$  tels que :

$$|\tilde{\alpha}(0, t_{2j})| = (k_0 k_L)^j \prod_{k=1}^{2j} \nu_k |\tilde{\alpha}(0, t_0)|$$

$$|\tilde{\beta}(0, t_{2j+1})| = (k_0 k_L)^j \prod_{k=1}^{2j} \nu_k |\tilde{\beta}(0, t_1)|$$

On en conclut que si les paramètres de synthèse  $\lambda_0$  et  $\lambda_L$  sont choisis pour que  $k_0$  et  $k_L$  soient suffisamment petits, les quantités  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  convergent vers zéro sur les bords. Dans le cas d'un modèle homogène (c'est-à-dire  $q = 0$  et  $G(H, Q, q) = 0$ ), cela suffit à garantir la convergence de  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  vers zéro pour tout  $x$  (en raison de l'invariance des solutions caractéristiques). Par contre, dans le cas non homogène qui nous concerne ici, la convergence sur les bords n'implique pas automatiquement la convergence pour tout  $x$  (même si, par continuité, c'est très probable pour de petites perturbations comme nous allons le voir dans les simulations numériques).

L'analyse qui précède indique que la convergence est d'autant mieux garantie que les coefficients (positifs)  $k_0$  et  $k_L$  sont petits. Les valeurs minimum des coefficients sont  $k_0 = k_L = 0$  (correspondant à  $\lambda_0 = \lambda_L = 1$ , c'est-à-dire à des gains maximum pour la commande). En théorie ce choix est optimal car il correspond à une commande avec réponse en temps minimal nul (*dead-beat control*). En pratique, ce choix est généralement irréaliste car il produit des commandes beaucoup trop brutales pour les vannes. Le choix des gains  $k_0$  et  $k_L$  sera dès lors fixé empiriquement à l'aide de simulations et d'essais préliminaires menés avec prudence.

**Exemple numérique**

Comme dans la section 3 nous considérons le cas d'un canal de section rectangulaire et de largeur unitaire :  $\sigma(H) = H$  et  $\sigma' = 1$ .

Dans ce cas, nous avons :

$$\partial_H \varphi(H) = \sqrt{\frac{g}{H}}$$

et nous pouvons définir :  $\varphi(H) = 2\sqrt{gH}$

D'où :

$$\alpha = \frac{Q}{H} + 2\sqrt{gH} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{Q}{H} - 2\sqrt{gH}$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \bar{\alpha} = \frac{Q}{H} + 2\sqrt{gH} - \frac{\bar{Q}}{H} - 2\sqrt{g\bar{H}}$$

$$\tilde{\beta} = \beta - \bar{\beta} = \frac{Q}{H} - 2\sqrt{gH} - \frac{\bar{Q}}{H} + 2\sqrt{g\bar{H}}$$

Les lois de commandes deviennent :

$$Q_0 = \frac{\bar{Q}_0}{\bar{H}_0} H_0 - \lambda_0 H_0 \left( 2\sqrt{gH_0} - 2\sqrt{g\bar{H}_0} \right)$$

$$Q_L = \frac{\bar{Q}_L}{\bar{H}_L} H_L + \lambda_L H_L \left( 2\sqrt{gH_L} - 2\sqrt{g\bar{H}_L} \right)$$

Dans l'espace  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  on a :

$$H = \frac{(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} + 4\sqrt{gH})^2}{16g}$$

$$Q = \frac{(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 2\frac{\bar{Q}}{H})}{2} \frac{(\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} + 4\sqrt{gH})^2}{16g}$$

Pour la résolution numérique de ce problème nous utilisons le schéma implicite de Preissman (voir Malaterre, 1994). La simulation est effectuée avec les valeurs numériques suivantes :

Longueur du bief de canal :  $L = 50$  mètres

Largeur du bief de canal :  $l = 1$  mètre

Pente du bief :  $I = 1e - 4$

La constante de Strickler  $K = 40$

Le coefficient de Preissman  $\theta = 0,66$

Débit initial  $Q(x, 0) = 1,0m^3/s \forall x$

Niveau initial  $H(x, 0) = 1,0m \forall x$

Débit de consigne :  $\bar{Q}_0 = 1,5m^3/s$

Niveau de consigne :  $\bar{H}_L = 1,0$  mètre

Intervalle de prélèvement :  $l_1 = 8m, l_2 = 10m$

Débit spécifique de prélèvement :  $q = -0,2m^2/s$

Débit total prélevé :  $(l_2 - l_1)q = -0,4m^3/s$

Paramètres de réglage  $\lambda_0 = 0,9$  et  $\lambda_L = 0,8$

$k_0 = 0,05263 < 1$

$k_L = 0,11111 < 1$

Pas de discrétisation temporelle  $dt = 0,5s$

Pas de discrétisation spatiale  $dx = 0,5m$

Nombre de points de discrétisation temporelle  $Nt = 500$

Nombre de points de discrétisation spatiale  $Ns = 101$

Accélération de la gravitation  $g = 9,81m/s^2$

La figure 6 représente l'évolution du débit et de la hauteur à différents pas de temps. A  $T = 0$  la hauteur et le débit sont constants, à  $T = 5$  sous l'influence du prélèvement ils s'écartent de leurs valeurs initiale pour tendre vers leurs valeurs de régime désirées.

Une mesure globale de la performance du système de contrôle peut être donnée par la fonction d'entropie suivante :

$$R = \int_0^L \left( \frac{H}{2} \left( \frac{Q}{Hl} - \frac{\bar{Q}}{Hl} \right)^2 + g \frac{(H - \bar{H})^2}{2} \right) dx$$

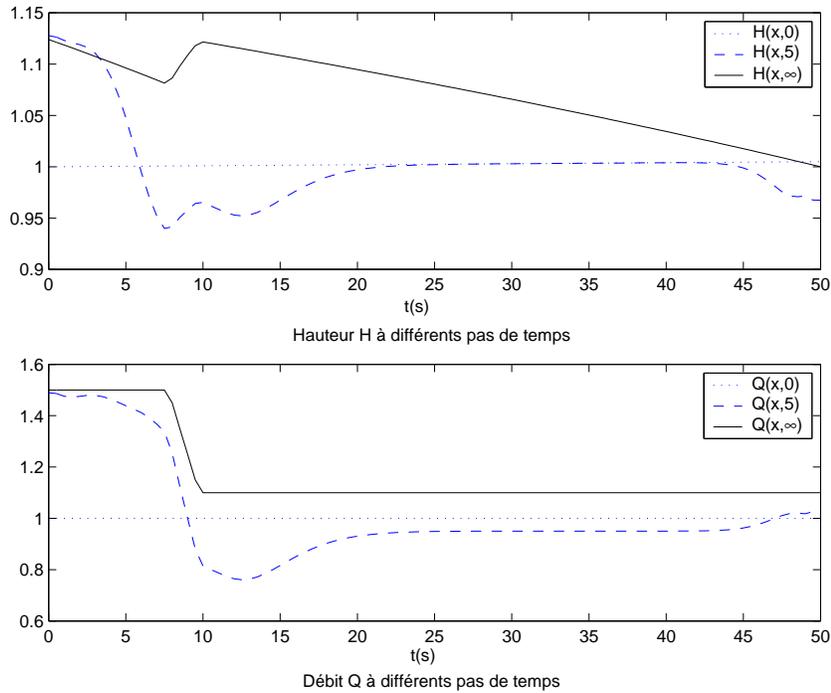
Cette fonction est utilisée comme une fonction de Lyapunov dans d'autres approches de conception des lois de commande. Une courbe comparative de la fonction d'entropie dans le cas où le débit est connu et celui du cas où le débit prélevé est inconnu sera donnée dans la section suivante.

**7. Lois de commande adaptative avec prélèvements inconnus**

Dans cette partie, nous supposons qu'un prélèvement est effectué avec un débit constant mais inconnu. Nous nous limitons au cas d'un prélèvement uniforme localisé dans un intervalle. Notre objectif est toujours de proposer une loi de commande qui stabilise le niveau et le débit de l'eau au voisinage d'un état de regime désiré. Pour ceci nous allons utiliser une technique de contrôle adaptatif.

Nous supposons que le prélèvement constant mais inconnu s'effectue sur un intervalle selon le schéma suivant :

$$q(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < l_1 \\ \bar{q} < 0 & l_1 \leq x \leq l_2 \\ 0 & l_2 < x \leq L \end{cases}$$



**Figure 6.** Courbe comparative des débits et des hauteurs à différents pas de temps dans le cas du prélèvement à débit connu

Comme on l'a vu dans la section précédente, le calcul du profil de régime nécessite de connaître le débit du prélèvement, qui est inconnu dans cette section. L'idée est de faire une estimation adaptative de ce débit, de calculer le profil de régime associé à ce débit et de proposer des lois de commande similaires à celles de la section 5.

Le débit estimé du prélèvement sera calculé à l'aide d'un « observateur de perturbation ». Ce débit estimé est ensuite utilisé pour reconstruire le débit  $Q$  dans le bief de canal et par conséquent la hauteur estimée associée.

La version adaptative des lois de commande précédentes que nous proposons est :

$$Q_0(t) = \frac{\bar{Q}_0}{\sigma(\hat{H}_0)} \sigma_0 - \lambda_0 \sigma_0 (\varphi(H_0) - \varphi(\hat{H}_0))$$

$$Q_L(t) = \frac{\hat{Q}_L}{\bar{\sigma}_L} \sigma_L + \lambda_L \sigma_L (\varphi(H_L) - \varphi(\bar{H}_L))$$

ou :

$0 < \lambda_0 < 1$  et  $0 < \lambda_L < 1$  sont des paramètres de réglage ;

$\bar{Q}_0$  et  $\bar{H}_L$  désignent les points de consignes fixés par l'utilisateur ;

$\hat{H}_0$  et  $\hat{Q}_L$  désignent des estimées en ligne du niveau de régime  $\bar{H}_0$  et du débit de régime  $\bar{Q}_L$  respectivement. Ces estimées sont calculées comme suit :

$$\hat{Q}_L = \bar{Q}_0 + \hat{Q}_p(L) \text{ où } \hat{Q}_p(L) \text{ est aussi une estimée en ligne et vérifie :}$$

$$\hat{Q}_p(L) = \hat{q}(l_2 - l_1) \text{ et } \hat{q} \text{ est solution de l'équation d'adaptation}$$

$$\dot{\hat{q}} = \gamma_1(H_0 - \hat{H}_0) + \gamma_2(H_L - \bar{H}_L)$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des paramètres d'ajustement.

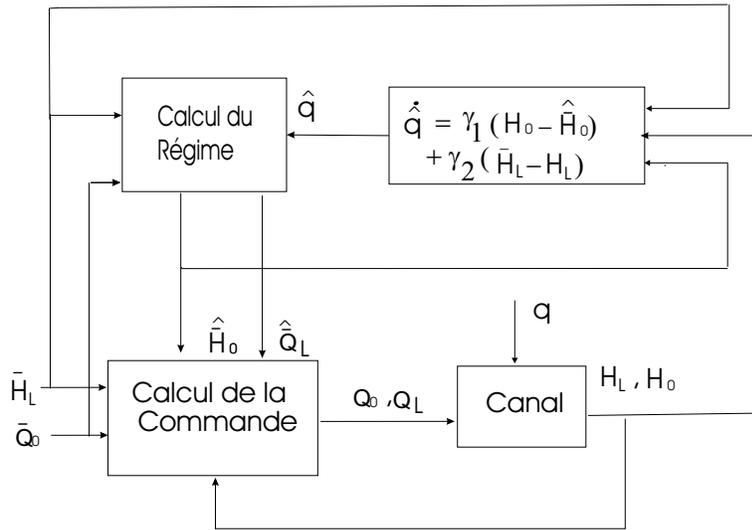
$\hat{H}_0$  : est solution de l'équation [8] dans laquelle  $q$  est remplacé par son estimée  $\hat{q}$

Cette loi d'adaptation est un « observateur de perturbation » construit sur le modèle des observateurs de Luenberger. Le principe est schématisé sur le diagramme bloc de la figure 7.

### **Exemple numérique**

Comme dans les exemples précédents, nous supposons  $\sigma(H) = H$  et donc  $\sigma' = 1$ ,

$$\begin{aligned} \partial_H \varphi(H) &= \frac{\sqrt{g\sigma\sigma'}}{\sigma} = \sqrt{\frac{g}{H}} \\ \varphi(H) &= 2\sqrt{gH} \end{aligned}$$



**Figure 7.** Diagramme bloc schématisant le principe du contrôle adaptatif dans le cas d'un prélèvement à débit inconnu

$$Q_0(t) = \frac{\bar{Q}_0}{\hat{H}_0} H_0 - 2\lambda_0 H_0 \left( \sqrt{gH_0(t)} - \sqrt{g\hat{H}_0} \right)$$

$$Q_L(t) = \frac{\hat{Q}_L}{\bar{H}_L} H_L + 2\lambda_L H_L \left( \sqrt{gH_L(t)} - \sqrt{g\bar{H}_L} \right)$$

Où  $\bar{Q}_0$  et  $\bar{H}_L$  désignent les points de consignes fixés par l'utilisateur comme précédemment.  $\hat{H}_0$  et  $\hat{Q}_L$  désignent des estimées en ligne du niveau de régime  $\bar{H}_0$  et du débit de régime  $\bar{Q}_L$  respectivement. La simulation est effectuée avec les valeurs numériques suivantes :

Longueur du bief de canal :  $L = 50$  mètres

Largeur du bief de canal :  $l = 1$  mètre

Pente du bief :  $I = 1e - 4$

La constante de Strickler  $K=40$

Le coefficient de Preissman  $\theta = 0.66$

Débit initial  $Q(x, 0) = 1.0m^3/s \forall x$

Niveau initial  $y(x, 0) = 1.0m^3/s \forall x$

Débit de consigne :  $\bar{Q}_0 = 1.5m^3/s$

Niveau de consigne :  $\bar{y}_L = 1.0$  mètre

Intervalle de prélèvement :  $l_1 = 8m, l_2 = 10m$

Valeur initiale de  $\hat{q} = 0$ .

Débit spécifique de prélèvement réel :  $q = -0.2m/s$

Paramètres de réglage  $\lambda_0 = 0.9$  et  $\lambda_L = 0.8$

$k_0 = 0.05263 < 1$

$k_L = 0.11111 < 1$

Paramètres d'ajustement  $\gamma_1 = 0.7$  et  $\gamma_2 = 0.9$

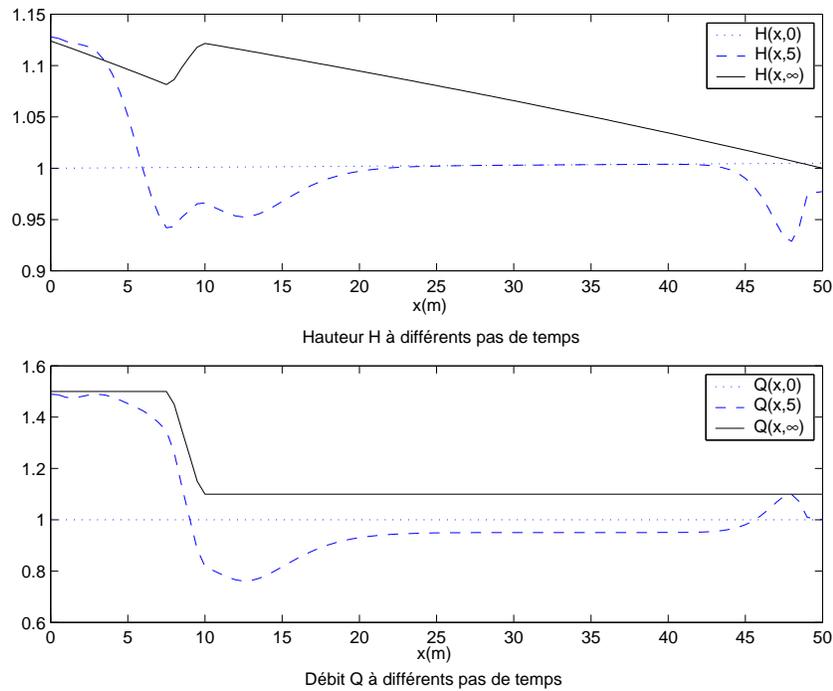
Pas de discrétisation temporelle  $dt = 0.5s$

Pas de discrétisation spatiale  $dx = 0.5m$

Nombre de points de discrétisation temporelle  $Nt = 500$

Nombre de points de discrétisation spatiale  $Ns = 101$

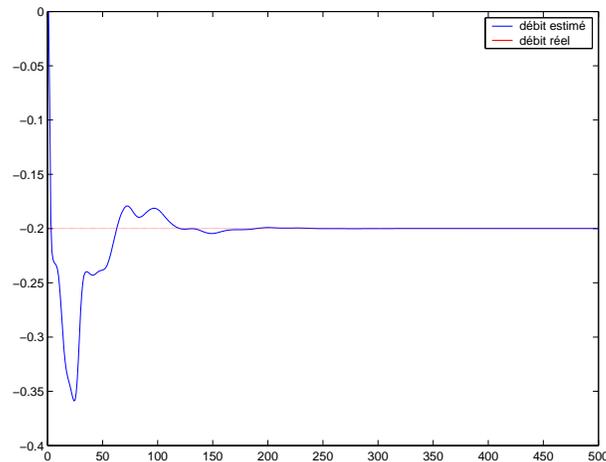
Accélération de la gravitation  $g = 9,81m/s^2$



**Figure 8.** Courbes comparatives des débits et des hauteurs à différents pas de temps dans le cas du prélèvement à débit inconnu

La figure 8 représente l'évolution du débit et de la hauteur à différents pas de temps. A  $T = 0$  la hauteur et le débit sont uniformes, à  $T = 5$  sous l'influence du prélèvement ils s'écartent de leurs valeurs initiales pour tendre vers les valeurs de régime désirées.

Sur la figure 9 on a une courbe comparative du débit réel prélevé et de celui estimé à chaque pas de temps. On observe que l'estimée converge vers la valeur réelle.



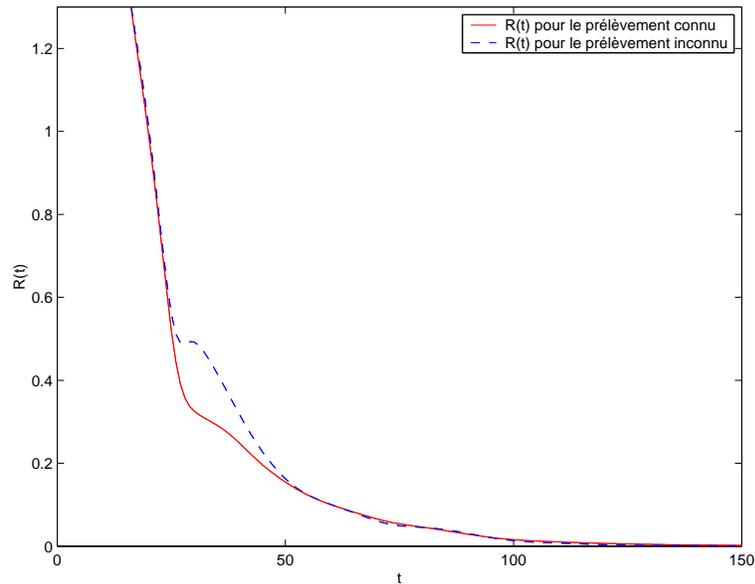
**Figure 9.** Courbe comparative du débit réel prélevé et du débit estimé

La figure 10 représente les fonctions d'entropie dans les deux cas étudiés. Comme on s'y attendait, on remarque que la convergence dans le cas du prélèvement à débit connu est meilleure.

## 8. Mise en œuvre des lois de commande

On examine ici la mise en œuvre de ces lois de commande par la manœuvre des vannes.

Une vanne est un organe mobile permettant de modifier localement la section d'écoulement ; elle permet de mesurer et/ ou de contrôler le débit  $Q$  s'écoulant dans des canaux ou sortant d'un réservoir. Il existe plusieurs types de vannes (voir Sinniger et Hager, 1989) selon qu'elles sont prévues pour des aménagements hydro-électriques (vanne de déversoir, vanne de prise, etc.), pour des cours d'eau (écluse, vanne de canaux découverts, etc.), ou pour des aménagements à basse chute (barrages mobiles, etc.). Cette dernière catégorie est celle qui nous intéresse, elle permet un écoulement de l'eau sur la vanne (vanne submergée), ou sous la vanne (vanne immergée) ou alors par une combinaison des deux.



**Figure 10.** Courbe comparative des fonctions d'entropie dans le cas du contrôle simple et du contrôle adaptatif

Une vanne submergée peut être une paroi disposée verticalement au dessus de laquelle l'eau passe vers l'aval, voir figure 11. Le débit est lié à la hauteur  $H$  de l'eau en amont par la relation :

$$Q = C_d ab \sqrt{2g} (H - U_0)^{3/2}$$

où  $C_d$  est le coefficient de débit,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $b$  la largeur du déversoir,  $H$  la hauteur de l'eau mesurée suffisamment en amont et  $U_0$  la hauteur du déversoir (qui est la variable de commande).

Une vanne immergée quant à elle peut également être une paroi disposée verticalement présentant une ouverture  $U_0$  au fond ou près du fond du canal par laquelle l'eau est débitée voir figure 11. Il existe deux types d'écoulement à travers une vanne immergée : écoulement noyé ou écoulement dénoyé. La relation entre le débit et l'ouverture de vanne est donnée par les expressions suivantes :

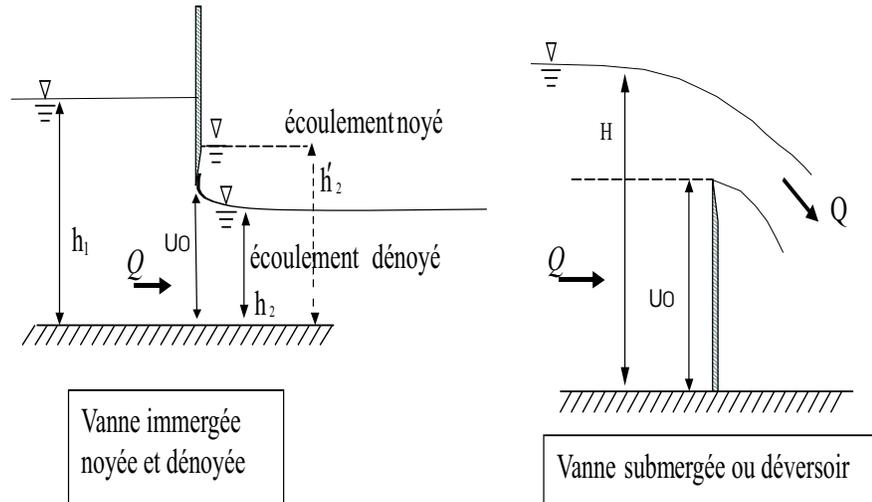
- dans le cas d'un écoulement noyé :

$$Q = U_0 K_v \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

- dans le cas d'un écoulement dénoyé :

$$Q = U_0 K_v \sqrt{2gh_1}$$

où  $U_0$  est l'ouverture de la porte (variable de commande),  $K_v$  est le coefficient de la vanne,  $h_1$  la hauteur de l'eau en amont,  $h_2$  et  $h'_2$  les hauteurs de l'eau en aval dans le cas noyé et dénoyé.



**Figure 11.** Vanne immergée et vanne submergée

**Illustration numérique**

Considérons à nouveau l'illustration numérique présentée précédemment. Nous supposons maintenant que le bief de canal est délimité par deux vannes submergées en écoulement noyé. Comme présenté à la figure 12.  $Y_{am}$  et  $Y_{av}$  désignent respectivement les niveaux en amont et en aval du bief. Les relations entre les débits et les ouvertures de vannes s'écrivent :

$$Q_0^2 = U_a (Y_{am} - H_0)$$

$$Q_L^2 = U_b (H_L - Y_{av})$$

où l'on a normalisé le coefficient de la vanne  $K_v = 1$ . Il va de soi que ces relations ne sont valables que pour  $H(0, t) \leq Y_{am}$  et  $H(L, t) \geq Y_{av}$ .

Les actions de commande à appliquer aux portes sont alors déduites des lois de commande en débit comme suit :

- dans le cas où le débit du prélèvement est connu :

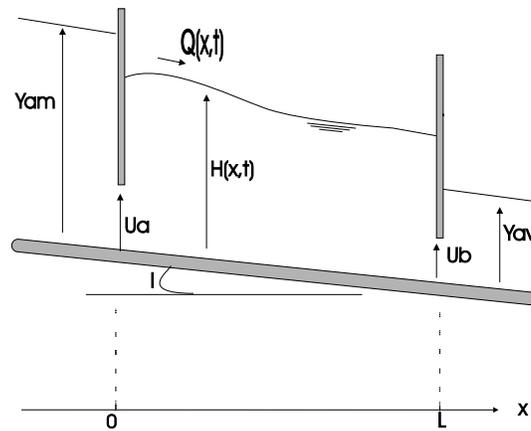
$$U_a = \frac{\left( \frac{\bar{Q}_0}{\bar{\sigma}_0} \sigma_0 - \lambda_0 \sigma_0 (\varphi(H_0) - \varphi(\bar{H}_0)) \right)^2}{Y_{am} - H_0}$$

$$U_b = \frac{\left( \frac{\bar{Q}_L}{\bar{\sigma}_L} \sigma_L + \lambda_L \sigma_L (\varphi(H_L) - \varphi(\bar{H}_L)) \right)^2}{H_L - Y_{av}}$$

- dans le cas du contrôle adaptatif :

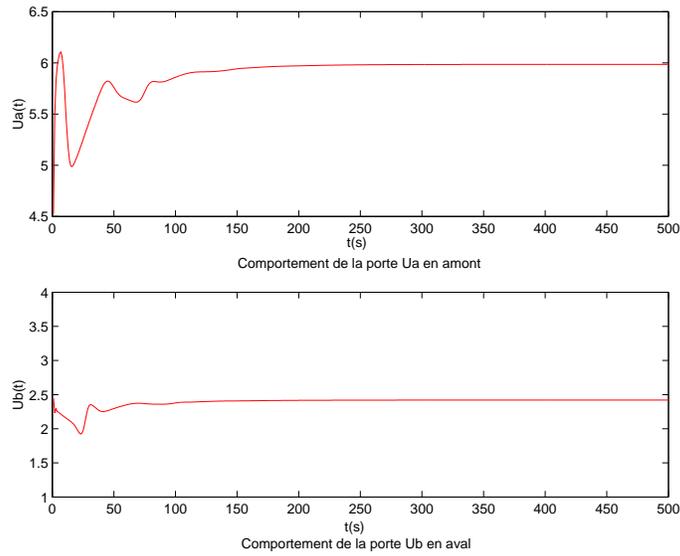
$$U_a = \frac{\left( \frac{\hat{Q}_0}{\hat{\sigma}(\hat{H}_0)} \sigma_0 - 2\lambda_0 \sigma_0 (\varphi(H_0) - \varphi(\hat{H}_0)) \right)^2}{Y_{am} - H_0}$$

$$U_b = \frac{\left( \frac{\hat{Q}_L}{\hat{\sigma}_L} \sigma_L + 2\lambda_L \sigma_L (\varphi(H_L) - \varphi(\bar{H}_L)) \right)^2}{H_L - Y_{av}}$$

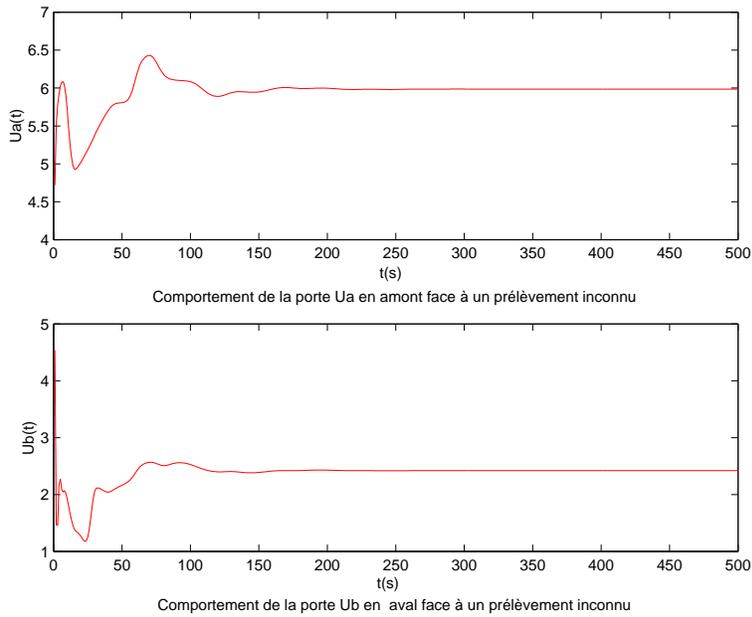


**Figure 12.** Bief de canal délimité par deux vannes immergées

Pour l'exemple numérique présenté dans la section 4, le comportement des ouvertures de vannes est représenté à la figure 13.



**Figure 13.** Comportement de la porte amont et aval dans le cas d'un prélèvement connu



**Figure 14.** Ouverture  $U_a$  et  $U_b$  dans le cas d'un prélèvement inconnu

## 9. Conclusion

En se basant sur les travaux effectués dans (de Halleux *et al.*, 2003) et (Bastin *et al.*, 1999) nous avons proposé des lois de commande qui stabilisent le débit et le niveau de l'eau à un état de régime désiré dans un canal soumis à des prélèvements. Pour cela nous avons utilisé le principe du contrôle par amortissement frontière inspiré par Greenberg et Tsien, (1984).

Les lois de commande présentent l'avantage de ne nécessiter que des mesures de niveau et pas de mesures de débit. Sous l'hypothèse de l'existence de solutions bornées et d'un écoulement sous-critique, la convergence de l'état du système vers les valeurs de régime aux extrémités du bief a été analysée. Mais l'analyse complète de la stabilité est une question théorique difficile qui reste ouverte. Les simulations indiquent cependant que, dans des conditions expérimentales normales, on observe effectivement une stabilisation complète du niveau et du débit dans le bief comme on peut s'y attendre.

On peut envisager d'étendre l'approche présentée dans cet article dans plusieurs directions. Dans le cas de prélèvement connu, la méthode peut aisément être étendue au cas multibief en suivant la démarche présentée dans (de Halleux *et al.*, 2003).

La commande adaptative proposée dans la section 8 a été limitée au cas d'un débit prélevé uniforme dont la localisation est connue. La généralisation au cas où les prélèvements ne sont pas connus ou dont la localisation est inconnue n'est pas immédiate. On notera cependant que l'on peut appliquer la loi de commande adaptative telle quelle en considérant que l'estimée  $\hat{q}$  représente un débit de prélèvement uniforme moyen le long du bief (ou éventuellement sur une partie du bief). Dans ce cas, le niveau  $H_L(t)$  et le débit  $Q_0(t)$  convergent vers les valeurs de consigne, mais le profil de régime (débit et ligne d'eau) qui s'établira sera évidemment différent du profil de régime moyen calculé par la loi de commande.

## 10. Bibliographie

- Bastin G., Coron J.M., d'Andréa Novel B., « A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by Saint-Venant equations », *Proceedings of ECC Karlsruhe*, 1999.
- Chow V.T., *Open-Channel hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.
- de Halleux J., Coron J.M., d'Andréa-Novel B., Prieur C., Bastin G., « Boundary feedback control in networks of open channels, *Automatica* », vol. 39, p. 1365-1376, 2003.
- Georges D., Litrico X., *Automatique pour la gestion des ressources en eau*, Hermès Science Publications, 2002.
- Graf W.H., *Hydraulique Fluviale*, vol. 16, Presses polytechniques et universitaires romandes, Eyrolles édition, 1993.
- Greenberg J.M., Tsien L.T., « The effect of boundary damping for the quasilinear wave equation, *Journal of Differential Equation* », p. 66-75, 1984.
- Henderson F.M., *Open channel flow*, MacMillan Publishing Co., INC, New York, 1966.

- Litrico X., Fromion V., Baume J., Malaterre P., « Modélisation et commande robuste de systèmes hydrauliques à surface libre : application aux rivières et canaux d'irrigation », *Journées thématiques « Automatique et environnement »*, CRAN, Nancy, 14p., mars 2000.
- Malaterre P.O., Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation, PhD Thesis, CEMAGREF, 1994.
- Serre D., *Systèmes de loi de conservations I et II*, Diderot éditeur Art et Sciences, Paris, New-york, Amsterdam, 1996.
- Sinniger R.O., Hager W.H., *Constructions hydrauliques*, vol. 15, Presses polytechniques romandes, Eyrolles édition, 1989.
- Xu C., Sallet G., « Proportional and Integral regulation of irrigation canal systems governed by Saint-Venant equation », *Proceeding of the 14th world control congress*, Beijing, China, 1999.

Reçu le : 06 mai 2003

Accepté le : 15 mars 2004